

Übungsklausur für Mathematik 13.2

(V e k t o r r e c h n u n g)

Schwierigkeitsgrad:

Aufgaben 1 und 2: **Standard**Aufgabe 3: **Anspruchsvoll**Aufgabe 4: **Transfer (knifflig)**

1. Gegeben ist die Gerade $\vec{g} = [3|3|3] + \lambda \cdot [1|2|3]$ und der Punkt $P(5 | 10 | 7)$. Wie groß ist der Abstand zwischen dem Punkt und der Geraden?
2. Gegeben sind die beiden Geraden $\vec{g} = [2|4|6] + \lambda \cdot [5|3|1]$ und $\vec{h} = [12|7|13] + \mu \cdot [0,5|-1|1]$
 - a) Wie weit entfernt sind die beiden Geraden?
 - b) Welchen Winkel schließen sie ein?
 - c) Was folgt daraus für ihre Lage?
3. Die Punkte $A(3 | 2 | 1)$; $B(4 | 5 | 6)$; $C(7 | 8 | 9)$ liegen auf der Ebene \vec{E} .
 - a) Geben Sie die Parameterdarstellung dieser Ebene an!
 - b) Formen Sie die Parameterdarstellung in die Normalform um!
 - c) Formen Sie die Normalform in die Koordinatengleichung um!
 - d) Geben Sie die Spurpunkte und die Spurgeraden an!
 - e) Liegt der Punkt $D(10 | 11 | 12)$ auf der Ebene?
 - f) Welchen Abstand hat die Ebene vom Ursprung?
 - g) Geben Sie eine Gerade an, die in der Entfernung 8 über der Ebene liegt.
 - h) In welchem Punkt schneidet die Gerade $\vec{g} = [4|0|0] + \lambda \cdot [0|3|3]$ die Ebene?
 - i) Die Ebene \vec{F} wird definiert durch folgende Koordinatengleichung: $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$
Wie sieht die Parameterdarstellung dieser Ebene aus?
 - j) Berechnen Sie die Schnittgerade aus den Parameterdarstellungen der Ebenen \vec{E} und \vec{F} !
4. Gegeben ist die Ebene $\vec{E}: 9 = x_1^2 + x_2^2 - x_3$.
 - a) Berechnen Sie die Schnittmenge zwischen der Ebene, die zwischen der x_1 - und x_2 -Achse aufgespannt wird und der Ebene \vec{E} !
 - b) Welche geometrische Figur hat die Schnittmenge?

Tipp: Setzen Sie für x_3 die x_1 - x_2 -Ebene ein!

Lösungen

Nr. 1

$$\begin{aligned} OQ &= g; & PQ &= OQ - OP; & PQ \cdot [1|2|3] &= 0 \\ PQ &= [3|3|3] \lambda \cdot [1|2|3] - [5|7|10] = [-2|-7|-5] \lambda \cdot [1|2|3] \\ ([-2|-7|-5] \lambda \cdot [1|2|3]) \cdot [1|2|3] &= 0 & \Leftrightarrow & & -2 + \lambda - 14 + 4\lambda - 12 + 9\lambda &= 0 \\ 14\lambda &= 28 & \Leftrightarrow & & \lambda &= 2 \\ PQ &= [-2|-7|-5] \cdot 2 \cdot [1|2|3] = [0|-3|2] \\ |PQ| &= \text{SQR}(13) = 3,606 \end{aligned}$$

Nr. 2

$$\begin{aligned} \text{a) } OP &= g; & OQ &= h; & PQ &= OQ - OP = g - h; \\ PQ &= [2|4|6] + \lambda \cdot [5|3|1] - [12|7|13] - \mu \cdot [0,5|-1|1] \\ &= [-10|-3|-7] + \lambda \cdot [5|3|1] + \mu \cdot [-0,5|1|-1] \end{aligned}$$

$$PQ \cdot [5|3|1] = 0 \wedge PQ \cdot [-0,5|1|-1] = 0$$

$$([-10|-3|-7] + \lambda \cdot [5|3|1] + \mu \cdot [-0,5|1|-1]) \cdot [5|3|1] = 0 \wedge ([-10|-3|-7] + \lambda \cdot [5|3|1] + \mu \cdot [-0,5|1|-1]) \cdot [-0,5|1|-1] = 0$$

$$-50 + 25\lambda - 2,5\mu - 9 + 9\lambda + 3\mu - 7 + \lambda - \mu = 0 \wedge 5 - 2,5\lambda + 0,25\mu - 3 + 3\lambda + \mu + 7 - \lambda + \mu = 0$$

$$-66 + 35\lambda - 0,5\mu = 0 \wedge 9 - 0,5\lambda + 2,25\mu = 0$$

$$\mu = -132 + 70\lambda$$

$$9 - 0,5\lambda + 2,25(-132 + 70\lambda) = 0$$

$$9 - 0,5\lambda - 297 + 157,5\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 157\lambda = 306 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1,949$$

$$\mu = -132 + 70 \cdot 1,949 = 4,433$$

$$PQ = [-10|-3|-7] + 1,949 \cdot [5|3|1] + 4,433 \cdot [-0,5|1|-1] = [-2,472|7,28|-9,484]$$

$$|PQ| = 12,209$$

$$\text{b) } \alpha = \arccos\left(\frac{[5|3|1] \cdot [0,5|-1|1]}{|[5|3|1]| \cdot |[0,5|-1|1]|}\right) = \arccos\left(\frac{0,5}{35 / 2,25}\right) = 89,636^\circ$$

c) Sie sind windschief, aber fast orthogonal zueinander.

Nr. 3

Die Lösung für diese Aufgabe ist in Arbeit. Beachte, dass sich die Aufgabenstellung geändert hat, weil die Ebene vorher eine Gerade war.

Nr. 4

$$\text{a) } x_1-x_2\text{-Ebene: } x_3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 = 9 - x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \pm \text{SQR}(3^2 - x_2^2)$$

$$\text{b) } x_1^2 = 9 - x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

Es handelt sich um einen Kreis mit dem Radius 3.